Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

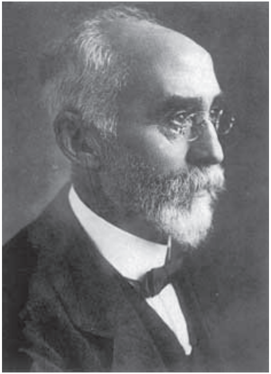
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

transformacje Lorentza - wyprowadzenie

Transformacje współrzędnych muszą być liniowe:



$$x' = ax + bt \qquad x = a'x' + b't'$$

Początek układu S' jest w $x' = 0$ i spełnia równanie:

$$0 = ax + bt \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a} = \frac{x}{t} = v$$

Podobnie początek $x = 0$ układu S spełnia równanie:

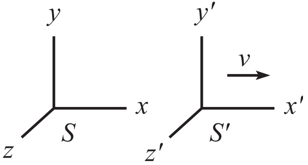
$$0 = a'x' + b't' \quad \Rightarrow \quad -\frac{b'}{a'} = \frac{x'}{t'} = -v$$

Podstawiamy za a i b:

$$x' = a(x - vt) \quad \text{oraz} \quad x = a'(x' + vt') \qquad (\star)$$

Żądanie symetrii przy zmianie S na S' prowadzi do warunku

$$a = a'$$



Transformacje Lorentza - Einsteina

Przypuśćmy, że wysyłamy sygnał świetlny w chwili $t = t' = 0$ z punktu $x = x' = 0$:

$$x' = ct' \quad \text{oraz} \quad x = ct$$

Korzystając z równań ($\star$) dostajemy:

$$ct' = a(ct - vt) \quad \text{oraz} \quad ct = a(ct' + vt')$$

Mnożąc powyższe równania stronami dostajemy:

$$c^2 tt' = a^2 tt'(c^2 - v^2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma(v)$$

A więc transformacje współrzędnych przestrzennych mają postać:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \text{oraz} \quad x = \gamma(x' + vt')$$

Współrzędne przestrzenne prostopadłe do kierunku ruchu transformują się trywialnie:

$$y' = y \quad \text{oraz} \quad z' = z$$

Transformacje Lorentza - Einsteina

Aby znaleźć transformacje współrzędnych czasowych, przekształcamy równania ($\star$) do postaci:

$$avt' = x - ax' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{x}{av} - \frac{x'}{v} = \frac{x}{av} - \frac{a}{v}(x - vt) = at + \frac{x(1-a^2)}{av}$$

Podstawiając $a = \gamma$ znajdujemy transformacje współrzędnych czasowych:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \text{oraz} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx}{c^2}\right)$$

Podsumowując, tranformacje Lorentza-Einsteina mają postać:

$$\text{w przód} \quad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \text{w tył} \quad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Niezmienniczy interwał czasoprzestrzenny

Z niezmienniczości prędkości światła wynika, że jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$, to również spełniony jest warunek $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0$.

Rozważmy transforamację wielkości $\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &\equiv ct^2 - x^2 = c^2\gamma^2\left(t'^2 + \frac{vx'}{c^2}\right)^2 - \gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 = \\ &= \gamma^2\left(c^2t'^2 + 2vx't' + \frac{v^2}{c^2}x'^2 - x'^2 - 2vx't' - v^2t'^2\right) = \\ &= \gamma^2\left(c^2t'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = c^2t'^2 - x'^2 = \left(\Delta s'\right)^2\end{aligned}$$

A więc jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = b$ to również $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = b$, dla dowolnego b.

Wielkość Δs nazywamy niezmienniczym interwałem czasoprzestrzennym.

Przykład: (dylatacja czasu) Rozważmy dwa zdarzenia zachodzące w początku układu S' w odstępie czasu t'.

$$\left.\begin{array}{l} S' : \ (x', t') = (0, t') \\ S : \ \ (x, t) = (vt, t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c^2t'^2 - 0 = c^2t^2 - v^2t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma t'$$

Interpretacja fizyczna interwału Δs^2

- $\Delta s^2 > 0$ (zdarzenia rozdzielone ‘czasopodobnie’)
  Ponieważ $c^2t^2 > x^2$ więc istnieje takie $|v| = |x/t| < c$ dla którego $x' = \gamma(x - vt) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, a wielkość $s/c = t'$ jest czasem własnym.
- $\Delta s^2 < 0$ (zdarzenia rozdzielone ‘przestrzennopodobnie’)
  $c^2t^2 < x^2 \;\Rightarrow\; |t/x| < 1/c$. A więc istnieje takie $v = c^2t/x < c$, że $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia zachodzą jednocześnie, a wielkość $|s|$ jest długością własną ($s^2 = c^2t'^2 - x'^2 = x'^2$).
- $\Delta s^2 = 0$ (świetlny, zerowy)
  Ponieważ $c^2t^2 = x^2$ więc $|x/t| = c$ w każdym układzie. A więc nie istnieje układ w którym oba zdarzenia byłyby jednoczesne lub zachodziły w tym samym miejscu (układ taki musiałby poruszać się z prędkością światła).

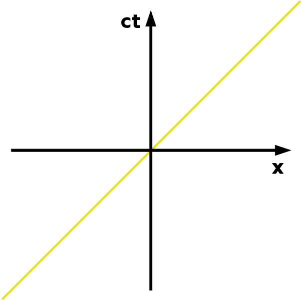
Przykład: Czy można znaleźć taki układ w którym Chrzest Polski i Bitwa pod Grunwaldem zaszłyby (a) w tym samym miejscu, (b) w tym samym czasie?

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \approx 200 \text{ km} \\ t_1 - t_2 = 1410 - 966 = 444 \text{ lata} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = 17.6 \cdot 10^{36} - 4 \cdot 10^{10} > 0$$

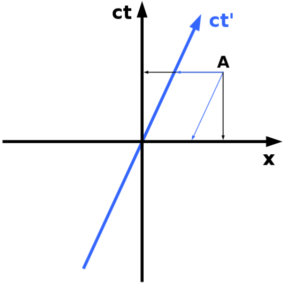
Interwał jest czasopodobny, więc istnieje więc taki układ w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. Układ taki porusza się od miejsca Chrztu do miejsca Bitwy z predkością $v = (200 \text{ km})/(444 \text{ lata})$.

Diagramy czasoprzestrzenne

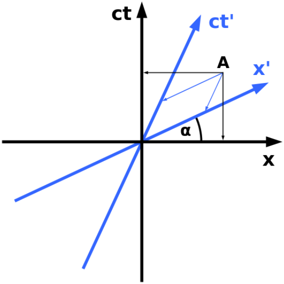
Współrzedne (t, x) dowolnego zdarzenia P przyjmują różne wartości w różnych układach odniesienia. Do opisu konieczna jest znajomość praw transformacyjnych.



Linia świata światła



Transformacja Galileusza



Transformacja Lorentza

t' – linia świata punktu O w układzie (x, t),

x' – prosta równoległa do dowolnej prostej łączacej zdarzenia jednoczesne i przechodząca przez punkt $t' = 0$.

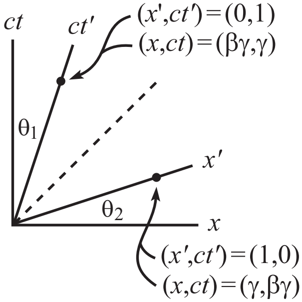
Diagramy Minkowskiego - jednostki

- Kąt nachylenia i jednostka osi ct':

$$(x', ct') = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x = \gamma\,(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad (x, ct) = (\gamma v/c, \gamma)$$

A więc kąt nachylenia dany jest przez $\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta$

'Na papierze': $\frac{1 \text{ jednostka } ct'}{1 \text{ jednostka } ct} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$



- Kąt nachylenia i jednostka osi x':

$$(x', ct') = (1, 0) \quad \Rightarrow \quad (x, ct) = (\gamma, \gamma v/c)$$

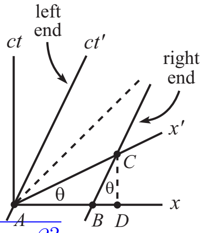
A więc kąt nachylenia dany jest przez:
$\mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c} = \beta$

'Na papierze': $\frac{1 \text{ jednostka } x'}{1 \text{ jednostka } x} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$

Jednostkową długość na osi współrzędnej x wyznaczają punkty przecięcia z hiperbolą: $x^2 - c^2t^2 = 1$

Diagramy Minkowskiego - przykład

Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S'. Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S.

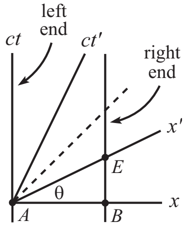


S': $AC = 1$ m

S: $AC = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ – długość ‘na papierze’

$$\begin{aligned} AB &= AD - BD = (AC)\cos\theta - (AC)\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta = \\ &= (AC)\cos\theta\left(1-\mathrm{tg}^2\,\theta\right) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\,\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S. Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S'.



S: $AB = 1$ m

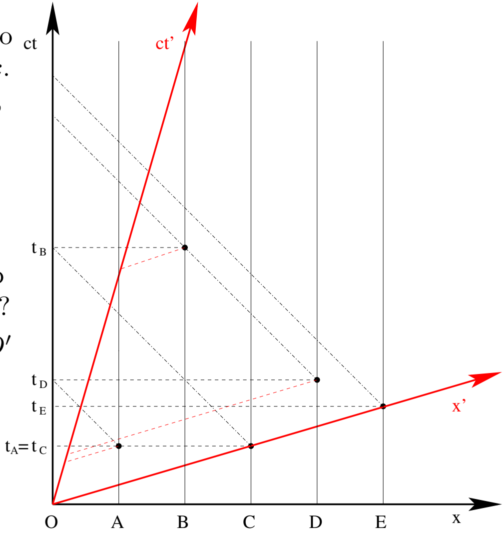
S': $AE = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\beta^2}$ – długość ‘na papierze’

Ponieważ jednostka na osi x' ma długość $\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, więc w jednostkach osi x' dugość AE wynosi $\sqrt{1-\beta^2}$.

Względność równoczesności - przykład

Lampy A, B, C, D, E umieszczono w równych odstępach wzdłuż osi x. W układzie w którym spoczywają, zapalają się w chwilach t_A, t_B, t_C, t_D i t_E.

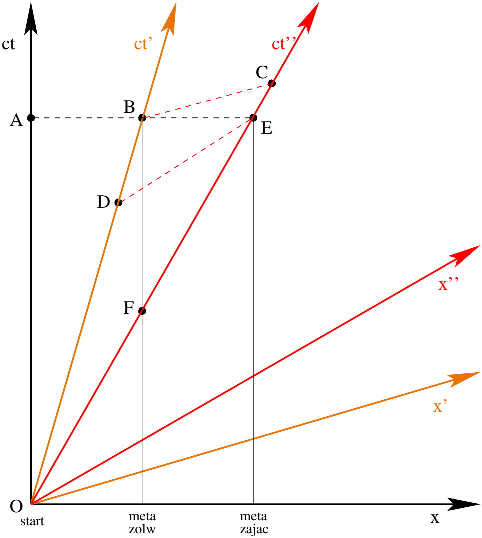
- Jaka jest kolejność zapalania się lamp w układach S i S'?
- W jakiej kolejności światło lamp dociera do obserwatorów O i O'?
- Gdzie znajduje się obserwator O' w chwili gdy dociera do niego światło lampy D?



Wyścig żółwia i zająca I

Zając i żółw startują z tego samego miejsca, jednak meta dla żółwia jest o połowę bliżej niż dla zająca. Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza remis.

- Które punkty oznaczają przekroczenie mety odpowiednio przez zająca i żółwia?
- W momencie gdy jedno z nich przekracza linie mety, gdzie znajduje się drugie?
- Kto wygrał według zająca?
- Czy żółw sie zgadza się z zającem?

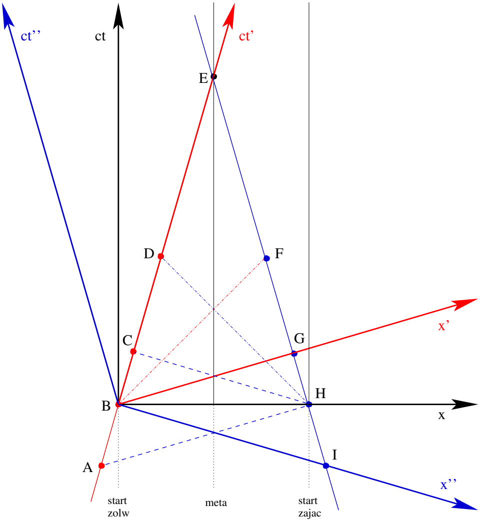


Wyścig żółwia z zającem II

Zając i żółw startują naprzeciw siebie i kończą na wspólnej linii mety, mając do przebycia jednakowe odległości. Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza, że obaj wystartowali jednocześnie i jednocześnie przekroczyli linię mety.

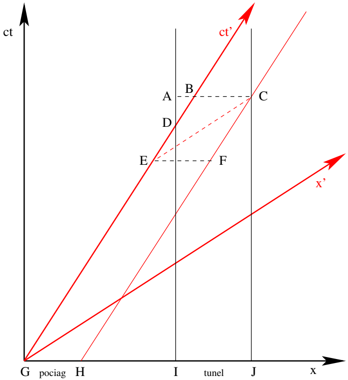
Podaj lokalizacje zdarzeń:

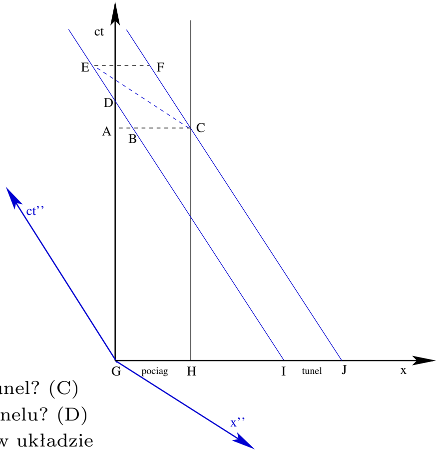
- żółw przekracza linię startu,
- gdzie wtedy (w układzie żółwia) znajduje się zając?
- zając widzi start żółwia,
- czy zgadzają się z sędzią co do równoczesnego przekroczenia linii startu i mety?



Pociąg przejeżdżający przez tunel

Pociąg i tunel mają jednakowe długości własne L_0, i poruszają się ze względną prędkością v.





- W którym punkcie początek pociągu opuszcza tunel? (C)
- W którym punkcie koniec pociągu wjeżdża do tunelu? (D)
- W którym punkcie znajduje się koniec pociągu, w układzie związanym z pociągiem, w chwili gdy początek pociągu opuszcza tunel? (E)
- W którym punkcie znajduje się początek pociągu, w układzie związanym z tunelem, kiedy koniec pociągu wjeżdża do tunelu?
- Czy pociąg zmieści się w tunelu, w układzie związanym z tunelem? A w układzie związanym z pociągiem?

Efekt Dopplera - klasyczny

Fala dźwiękowa wysyłana jest przez źródło Z, poruszające się z prędkością u_1 w kierunku odbiornika O, który porusza się w tym samym kierunku co zródło z prędkoscia u_2. Źródło wysyła impulsy o okresie $T = 1/f$.
Jaka jest częstość f' impulsów rejestrowanych przez odbiornik?

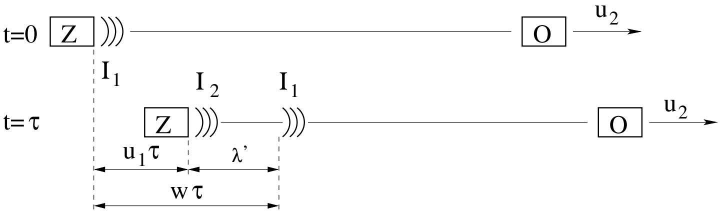
$$\lambda' = (w - u_1)\,\tau$$

$$\tau' = \frac{\lambda'}{w - u_2} = \tau\frac{w - u_1}{w - u_2} \quad \Rightarrow \quad f' = f\frac{w - u_2}{w - u_1}$$

Szczególne przypadki:

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{w}\right) \quad \text{gdy} \quad u_1 = 0,\ u_2 = v$$

$$f' = \frac{f}{1 + v/w} \quad \text{gdy} \quad u_1 = -v, u_2 = 0$$



Relatywistyczny efekt Dopplera - podłużny

W układzie S źródła ($\tau \equiv T_0 = 1/f_0$):

$$x_1 = ct_1 = x_0 + vt_1$$
$$x_2 = c(t_2 - n\tau) = x_0 + vt_2$$

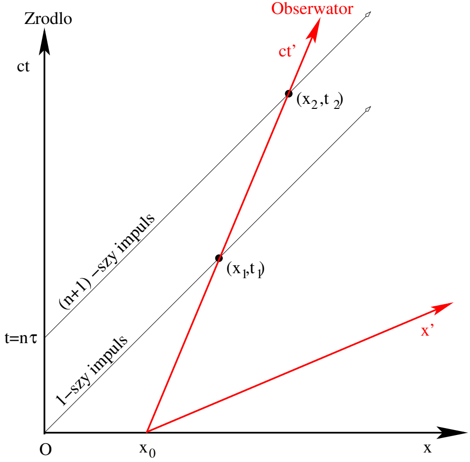
skąd

$$t_2 - t_1 = \frac{cn\tau}{c-v} \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \frac{vcn\tau}{c-v}$$

W układzie S' obserwatora:

$$T = \frac{1}{f} \equiv \tau' \equiv \frac{t'_2 - t'_1}{n} = $$
$$= \frac{1}{n}\gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = $$
$$= \gamma\left(\frac{c\tau}{c-v} - \frac{v}{c^2}\frac{vc\tau}{c-v}\right) = \gamma(1+\beta)\tau$$

A więc $f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$



Relatywistyczny efekt Dopplera - podłużny

To samo z innej perspektywy.

W układzie Obserwatora:

$$0 = -x_0 + ct_1$$
$$0 = -x_0 - vn\tau + c(t_2 - n\tau)$$

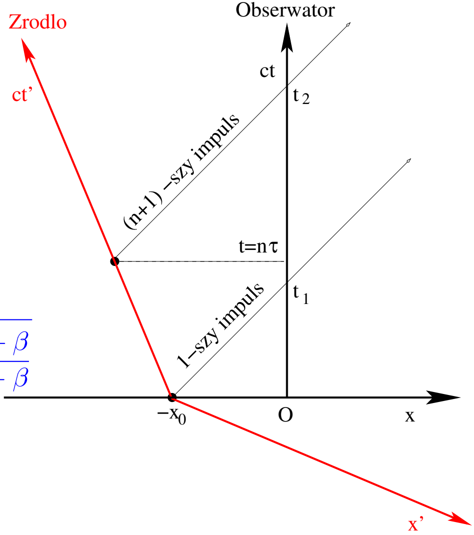
skąd

$$t_2 - t_1 = n\tau(1+\beta)$$

Dylatacja czasu daje $\tau = \gamma\tau'$, więc

$$T \equiv \frac{t_2 - t_1}{n} = \gamma\tau'(1+\beta) = T_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

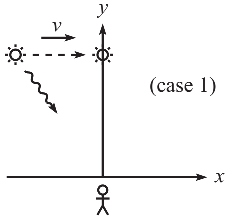
A więc $f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$



Relatywistyczny efekt Dopplera - poprzeczny

- Jaką częstotliwość widzimy gdy źródło (S') znajduje się w najmniejszej odległości od obserwatora (S)?

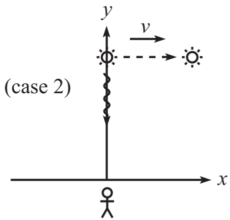
Z punktu widzenia źródła S', obserwator porusza się z prędkością v przecinając oś y' w chwili gdy fotony wyemitowane przez źródło wpadają do jego oczu ($S:\ T,\ S':\ T_0$):



$$T = \frac{T_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{f_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Jaką częstotliwość widzimy gdy źródło widzimy w najmniejszej odległości od obserwatora?

Fotony do oczu obserwatora S biegną wzdłuż osi y. Kiedy obserwator widzi, że źródło S' przecina oś y, widzi też błyski o mniejszej częstotliwości niż emitowane przez źródło:



$$T = \gamma T_0 \quad \Rightarrow \quad f = f_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Paradoks bliźniąt

Paradoksy w teorii względności oznaczają pozorną sprzeczność pomiędzy wynikami doświadczeń w zależności od obserwatora.

Schemat doświadczenia leżącego u podstaw paradoksu bliźniąt:

- Dwóch obserwatorów A i B przeprowadza eksperyment związany z dylatacją czasu.
- Synchronizuja identyczne zegary (w tym samym układzie odniesienia).
- Nastepnie A wybiera się w podróż w rakiecie z predkością v poruszając się w wybranym kierunku przez okres czasu $T_A/2$, a następnie zawraca i po czasie $T_A/2$ wraca na Ziemię, gdzie został jego kolega B.
- Obserwator B mierząc czas podróży T_B na swoim zegarze jest w stanie przewidzieć czas T_A zmierzony przez obserwatora A: $T_B = \gamma T_A$.

Paradoks, czyli pozorna sprzeczność, pojawia się gdy obserwator A twierdzi, ze to B poruszał się względem niego najpierw z prędkością $-v$, a nastepnie z prędkością v, i w związku z tym $T_A = \gamma T_B$.

Rozwiązanie: Obserwator A doznaje przyspieszenia podczas zawracania, co łamie symetrię pomiędzy A i B, a więc to A był wpodróży, a nie B.

Paradoks bliźniąt - efekt Dopplera

Każdy z obserwatorów wysyła do drugiego sygnały w równych odstępach czasu własnego ($1/f_0$). Po zakończeniu podróży porównują zliczenia.

	Obserwator B	Obserwator A
Całkowity czas podróży:	$T_B = \frac{2L}{v}$	$T_A = \frac{2L}{\gamma v}$
Liczba wysłanych sygnałów:	$f_0 T_B = \frac{2f_0 L}{v}$	$f_0 T_A = \frac{2f_0 L}{\gamma v}$
Kiedy widzi moment zawracania obserwatora A:	$t_{B1} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1+\beta)$	$t_{A1} = \frac{L}{\gamma v}$
Liczba odebranych sygnałów o częstości $f' = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$	$f' t_{B1} = \frac{f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2}$	$f' t_{A1} = \frac{f_0 L}{v}(1-\beta)$
Pozostały czas podróży:	$t_{B2} = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1-\beta)$	$t_{A2} = \frac{L}{\gamma v}$
Liczba odebranych sygnałów o częstości $f'' = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$	$f'' t_{B2} = \frac{f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2}$	$f'' t_{A2} = \frac{f_0 L}{v}(1+\beta)$
Całk. liczba odebranych sygn.:	$\frac{2f_0 L}{v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2f_0 L}{\gamma v}$	$\frac{2f_0 L}{v}$
Wniosek o upływie czasu zmierzonego przez drugiego obserw.:	$T_A = \frac{2L}{\gamma v}$	$T_B = \frac{2L}{v}$

Każdy z obserwatorów odbiera tyle sygnałów ile drugi wysłał pomiędzy początkiem i końcem podróży. Obydwoje zgadzają się co do zmierzonych upływów czasu.

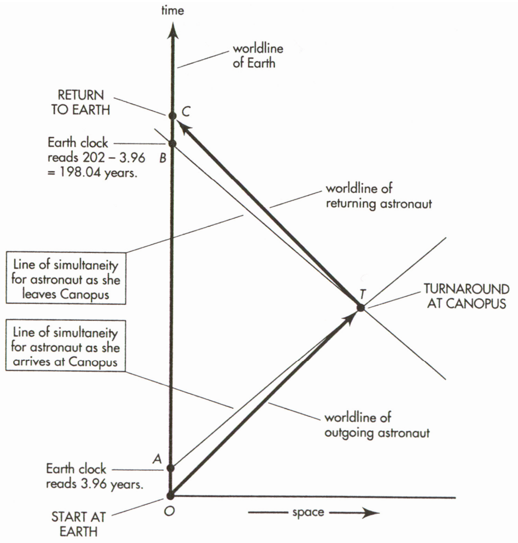
Paradoks bliźniąt - przykład

Podróż z Ziemi na Canopus:

$$L = 99 \text{ ly} \quad v = \frac{99}{101}c \quad \gamma = \frac{101}{20}$$

$$\frac{1}{2}T_A = 20 \text{ lat} \qquad \frac{1}{2}T_B = 101 \text{ lat}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{1}{2}T_A$$
$$\Rightarrow \quad t = 0.98x + 3.96$$



Podróż z Canopus na Ziemię:

$$t'' = \gamma\left(t + \frac{v(x-198)}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad t'' =$$
$$\Rightarrow \quad t = -0.98x + 198.04$$